

COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN FUNCIÓN POR TRAMOS MEDIANTE EL TRÁNSITO DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN ESTUDIANTES DEL CICLO I DE CONTABILIDAD

Candy C. Ordoñez Montañez

Roger L. Díaz Villegas

Universidad Nacional de Cañete

RESUMEN

Este trabajo de investigación tiene como objetivo analizar cómo el tránsito de distintos registros de representación semiótica permite la comprensión de la noción de función por tramos en estudiantes del ciclo I de Contabilidad de la Universidad Nacional de Cañete. Debido a que este análisis tiene como foco la comprensión de la noción función por tramos y los registros de representación semiótica elegimos como referencial teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval. Respecto a la metodología, consideramos el enfoque cualitativo que presenta las siguientes fases: análisis preliminar, elaboración de la actividad, experimentación y resultados. En cuanto a la experimentación, elaboramos y aplicamos 3 tareas que tienen como finalidad que los estudiantes evidencien el tránsito por diversos registros de representación semiótica como el registro de representación verbal, algebraico y gráfico. En el análisis de las producciones de los estudiantes nos concentramos en los logros y dificultades que muestran los estudiantes al realizar los procesos cognitivos: conversión y tratamiento.

Palabras clave: registros de representación semiótica – tratamientos – conversión - función por tramos- aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

Actualmente, observamos que la mayoría de los estudiantes ingresantes a las diferentes universidades de nuestro país, en su estadía, presentan dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y, la Universidad Nacional de Cañete no es ajena a esta problemática.

El presente trabajo de investigación surge por el interés de analizar la comprensión y dificultades que presentan los estudiantes de I ciclo de contabilidad en la adquisición de la noción de función por tramos mediante el tránsito de diversas representaciones semióticas planteadas por el investigador Raymond Duval.

Existen investigaciones como la de Yam (2009) que manifiesta que los estudiantes presentan diversos obstáculos en la adquisición de un nuevo conocimiento y en el uso del concepto de función. Además, en su estudio, señala la consecuencia que trae consigo cuando un conocimiento matemático no es adquirido, como es el caso de la noción de función por tramos. La investigadora señala que cuando el aprendizaje de esta noción es de manera débil o inadecuada, ésta se convierte en un obstáculo para la adquisición de nuevos conocimientos en el área del cálculo: continuidad, límite, derivada, etc. En el desarrollo de su investigación se concentró en (1) analizar las concepciones que tenían los estudiantes respecto al concepto de función y al de función por tramos, y (2) analizar si la función por tramos debe estar en el aprendizaje de continuidad y discontinuidad de funciones mediante un estudio de reconocimiento gráfico de funciones. A partir de las conclusiones del trabajo de la investigadora es importante reafirmar que los estudiantes presentan dificultades en la representación gráfica de la función por tramos y, que esto no favorece al aprendizaje de nuevos conocimientos matemáticos.

Por su parte, Chumpitaz (2013) en su investigación asegura que los estudiantes universitarios, particularmente, de la carrera de ingeniería muestran obstáculos en el aprendizaje de la función por tramos. Esto originó que se plantee como tema de investigación lo siguiente: ¿Cómo una secuencia de aprendizaje puede minimizar las dificultades que se presentan a los estudiantes cuando instrumentalizan algunas propiedades del software GeoGebra en su aprendizaje de la función definida por tramos y al instrumentalizar propiedades definida por tramos en su aprendizaje del GeoGebra? De este estudio y para nuestra investigación es relevante rescatar, de sus conclusiones, que en la aplicación de sus actividades los estudiantes presentaron dificultades para identificar el dominio, el rango y realizar transformaciones de

funciones por tramos. Sin embargo, la secuencia de aprendizaje que el autor propone consiguió minimizar dichas dificultades.

Los investigadores Saa y Trochez (2013) muestran el interés por caracterizar el estudio de la función por tramos en una secuencia didáctica buscando propiciar el manejo de diferentes representaciones semióticas e integrando recursos como GeoGebra y el periódico. Este estudio se realizó teniendo como una de sus teorías a la aplicación de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval. A partir de sus hallazgos, rescatamos que las situaciones diseñadas y aplicadas le permitieron identificar y analizar los logros y dificultades alcanzados por los estudiantes cuando se da el aprendizaje de la función por tramos. Estas situaciones se caracterizan de facilitar la transición de los diferentes registros de representación semiótica: lenguaje natural, tabular, algebraica y gráfica; señaladas en la Teoría de Duval.

Los estudios presentados anteriormente, nos permiten justificar que todavía está presente la preocupación por investigar sobre el aprendizaje, comprensión y dificultades de la función por tramos en estudiantes universitarios. Asimismo, la última investigación muestra la importancia de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval en la adquisición de la noción de función por tramos cuando estas se desarrollan a través del tránsito de registros de representación semiótica. En ese sentido, para nuestra investigación nos basaremos en la Teoría de Duval por los elementos teóricos que permite la investigación en el aprendizaje de las funciones y, particularmente, en la función por tramos.

Por todo lo expuesto, y por la relevancia ya evidenciada del tema, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera los estudiantes del ciclo I de contabilidad comprenden la noción de función por tramos cuando transitan por los distintos registros de representación semiótica?

De lo anterior, se desprenden los siguientes objetivos de investigación:

Objetivo general

Analizar cómo el tránsito de distintos registros de representación semiótica permite la comprensión de la noción de función por tramos en estudiantes del ciclo I de Contabilidad.

Objetivos específicos

- Diseñar tareas que permitan movilizar los elementos y propiedades de la función por tramos en sus diferentes registros de representación semiótica: lengua verbal, algebraico y gráfico.
- Analizar en las producciones de los estudiantes las actividades cognitivas de tratamiento y conversión cuando transitan en los registros de lengua verbal, algebraico y gráfico.

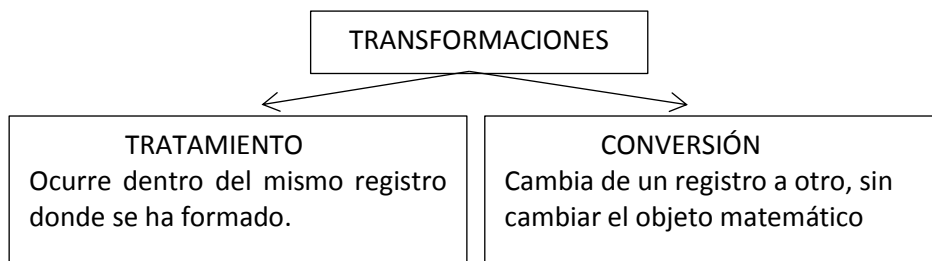
La presente investigación tiene como elementos teóricos la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval.

ASPECTOS DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

La Teoría de Registros de Representación Semiótica es propuesta por Raymond Duval y se enfoca en el uso de los registros de representación semiótica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Duval (2004) explica que:

Las representaciones semióticas, es decir aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...), no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. (p.14).

Es fundamental tener claro que los objetos matemáticos (división, funciones, cuadrados, etc.) no son objetos reales, es decir, no son accesibles a nuestra percepción; por esta razón surge la necesidad de recurrir a sus diversas representaciones (fracciones, gráficos, tabulaciones, etc.) (Duval, 2006). Asimismo, hay que diferenciar que en la actividad matemática lo importante no es la representación de un objeto matemático, sino las transformaciones que se pueden realizar sobre ellos. Se distingue dos tipos de transformaciones:



En el aprendizaje de las matemáticas, el tratamiento y la conversión son fuentes independientes, siendo la conversión un proceso más complejo que el tratamiento. Según Duval (2006) señala que la conversión es el resultado de la comprensión conceptual y cualquier dificultad es un indicativo de conceptos erróneos.

Es por esa razón, que la comprensión de un objeto matemático se basa en el uso de al menos dos registros de representación semiótica; es decir, los estudiantes al transitar entre diversos registros de representación semiótica logran la aprehensión del objeto matemático.

En base a nuestro objeto matemático en estudio, función por tramos, explicamos los registros de representación semiótica: registro verbal, registro gráfico y registro algebraico; tomando en cuenta los aportes de Ospina (2012).

- **Registro de representación verbal** es básicamente para interpretar situaciones contextualizadas. En este registro, la función por tramos está representando en una descripción en lenguaje natural y podemos hacer la conversión en otro registro como algebraico y gráfico.
- **Registro de representación gráfico** se enfoca en describir el comportamiento de la gráfica. En este registro, exige lecturas de representaciones gráficas y percibir las variaciones presentes en una función por tramos.
- **Registro de representación algebraico** esta expresión analítica se relaciona con la capacidad simbólica y principalmente con formular generalizaciones. La función por tramos es representada por una expresión matemática, algebraica o fórmula.

A continuación, presentamos un ejemplo de función por tramos en los diferentes registros.

Tabla 1. Ilustración de los registros de representación semiótica

Registro de representación Verbal	<p>La Compañía de buses Clarita permite a sus pasajeros transportar gratuitamente hasta 20 kg de equipaje y por cada kg adicional cobrará 0.5 soles.</p> <p>¿Cuánto es el monto total a pagar para cualquier cantidad de kilogramos de equipaje que pueda transportar un pasajero?</p>
Registro de representación algebraico	$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 20 \\ 0.5(x - 20), & x > 20 \end{cases}$ <p>donde x es los kilogramos de equipaje y $f(x)$ es el monto total a pagar.</p>
Registro de representación gráfico	<p>El gráfico muestra una función por tramos en un sistema de coordenadas. El eje horizontal se etiqueta 'Número de Kg' y tiene marcas de 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60. El eje vertical se etiqueta 'Monto total' y tiene marcas de -10, 0, 10, 20, 30, 40. La función se representa por una línea roja que permanece en el eje x (monto 0) desde x=0 hasta x=20. A partir de x=20, la línea se eleva con una pendiente constante de 0.5, pasando por puntos como (30, 1.5), (40, 3), (50, 4.5) y terminando en (60, 6). Una flecha roja indica que la línea continúa indefinidamente.</p>

MATERIAL Y MÉTODOS

La metodología aplicada en el presente trabajo está dada en un enfoque cualitativo. Por su parte, Hernández, Fernández y Baptista (2010) indican que la investigación cualitativa es “describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes” (p. 11). Además, Tocto (2015) señala que, en educación matemática, este tipo de investigación tiene como foco fundamental “describir y analizar procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos, haciendo uso de herramientas teóricas y matemáticas” (p.31).

Para dar cumplimiento con los objetivos propuestos y encaminarnos en la metodología de la investigación cualitativa realizamos las siguientes etapas:

1. **Análisis preliminar:** en esta etapa, los investigadores analizamos a nivel didáctico los libros de texto de Matemática básica y Matemático I que son generalmente usados por nuestros estudiantes. En los libros de texto examinamos cómo se trabaja desde una mirada de lo didáctico la noción función por tramos en base de la teoría de Registros de Representación Semiótica.
2. **Elaboración de la actividad:** diseñamos la actividad considerando que las tareas permitan la conversión de los registros de representación semiótica en lengua natural, algebraico y gráfico; del objeto matemático, función por tramos.
3. **Experimentación:** la actividad diseñada en la etapa anterior será puesta en práctica con 10 estudiantes de I ciclo de contabilidad de la Universidad Nacional de Cañete.
4. **Resultados:** realizamos el análisis de las producciones de los estudiantes presentados en las aplicaciones de las tareas.

A continuación, presentaremos los hallazgos obtenidos en cada una de estas etapas.

1. ANÁLISIS PRELIMINAR

El tratamiento de un objeto matemático en sus diferentes registros de representación semiótica es de vital importancia para asegurar la comprensión absoluta del objeto en estudio, es así que según Duval (2006), la comprensión de un objeto matemático se alcanza cuando un estudiante logra transitar de al menos en dos registros de representación semiótica. Sin embargo, este proceso no es tan habitual en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, pues encontramos en los libros de texto de matemáticas, más consultados por los

estudiantes, que la función por tramos son presentados habitualmente para el tratamiento en el registro de representación algebraica y con poca presencia en la representación gráfica, numérica y verbal. Esto genera, en consecuencia, una presentación parcial del objeto matemático para lograr con éxito su comprensión. Por las razones expuestas, al igual que los investigadores Oviedo y Kanashiro (2012) pensamos que la enseñanza de un objeto matemático debe ser presentado en sus diferentes registros de representación semiótica, en el tratamiento de los mismos y la conversión de un registro de representación en otro.

2. ELABORACIÓN DE LA ACTIVIDAD

El diseño de la actividad está compuesto por 3 tareas. A continuación, detallamos los objetivos de las tareas en base a los registros de representación semiótica.

Tabla 2. Objetivos de las tareas diseñadas

Tareas	Objetivos
Tarea 1	Ítem a), realizar el tratamiento en el registro verbal .
	Ítem b), realizar el tratamiento en el registro verbal .
	Ítem c), realizar la conversión del registro verbal al registro algebraico y tratamiento en este último.
	Ítem d), realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico y tratamiento en este último.
Tarea 2	Realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico y tratamiento en este último.
Tarea 3	Realizar la conversión del registro gráfico al registro verbal y tratamiento en este último.

La aplicación de las tareas se desarrolló en dos sesiones con una duración de 4 horas y 2 horas, respectivamente. Las tareas se aplicaron de manera individual.

- En la primera sesión iniciamos el trabajo con los estudiantes a partir de situaciones retadoras en que para dar soluciones se tuvo que asociar a la noción de función por tramos y sus propiedades. Se formaliza la noción presentando su definición y propiedades conjuntamente con la participación de los estudiantes. Al finalizar esta sesión, los estudiantes trabajan la tarea 1 de la actividad en un tiempo de 30 min., aproximadamente.
- La segunda sesión se aplicó las tareas 2 y 3.

3. EXPERIMENTACIÓN

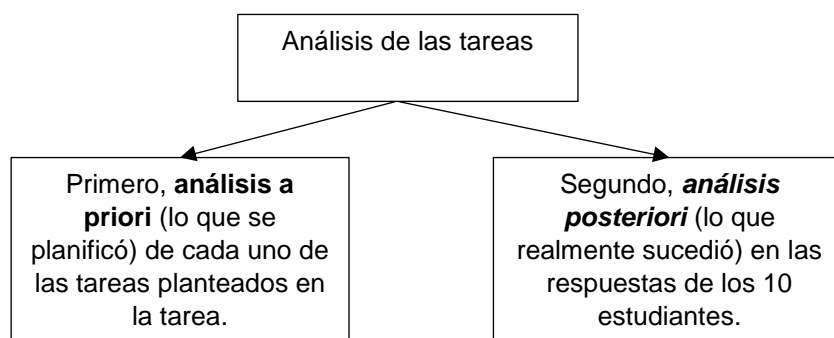
El presente trabajo se realizó con 10 estudiantes que cursan el primer ciclo de la carrera profesional de Contabilidad de la Universidad Nacional de Cañete. El grupo estuvo conformado por 5 varones y 5 mujeres, sus edades están comprendidas entre 17 a 25 años. Cabe resaltar que este grupo de estudiantes no cuentan con conocimientos previos sobre la noción de función por tramos y sus propiedades.

Asimismo, en el plan de estudio de la carrera profesional de Contabilidad, en el I ciclo, se cuenta con el curso de matemática básica, es un curso obligatorio sin pre requisito con 5 horas pedagógicas a la semana, desarrollada durante 17 semanas de un semestre académico. En este curso que se imparte es aquí donde es tratado el tema de función por tramos.

4. RESULTADOS

A continuación, mostramos el análisis de las tareas aplicadas. Este análisis se desarrolla en base de la perspectiva de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

El análisis de las tareas y las producciones de los estudiantes se organizan y presentan según el esquema siguiente:



Análisis de la tarea 1

La tarea 1 está compuesta por 4 ítems, los cuales están destinadas a trabajar el tratamiento y la conversión de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Enseguida mostramos el problema contextualizado y el análisis del ítem 1a) y b).

Problema Contextualizado

- 1) En el Perú, un trabajador independiente debe presentar anualmente su declaración jurada de impuesto a la renta. En ella debe reportar sus ingresos y dependiendo del monto total anual de este valor, deberá abonar el impuesto a la renta. Se sabe que, en nuestro país, la Unidad Impositiva Tributaria (UIT) es de S/. 4 150. Para determinar el monto que debe pagar es necesario tener en cuenta la siguiente norma:
- Para ingresos que no excedan a los 7 UIT, no pagan impuesto a la renta.
 - Para ingresos mayores a 7 UIT, se pagará el 8% del exceso de los 7 UIT.

Adaptado del Libro "Matemática para no matemáticos"

Análisis a priori de la tarea 1 ítem a) y b)

a) **Determine el valor del impuesto a la renta (R) cuando el ingreso (I) es:**

Ingreso (I)	Impuesto a la Renta (R)
I = S/. 28 450	
I = S/. 48 000	
I = S/. 45 540	

b) **Determine la variable independiente y dependiente**

Variable independiente	
Variable dependiente	

La tarea 1 a) y b) tienen como propósito que los estudiantes realicen el tratamiento en el registro de representación verbal. Se espera que los estudiantes, al comprender el problema, puedan 1) reconocer que los valores van cambiando y las unidades en ambos casos se da en soles, 2) hallar el impuesto a la renta a partir de las condiciones dadas y 3) identificar la variable independiente (I) y la variable dependiente (R).

Análisis a posteriori de la tarea 1 ítem a) y b)

Respecto al tratamiento del registro verbal, 8 de los 10 estudiantes realizaron el tratamiento de manera adecuada, pues cada valor del ingreso lo asocian a un valor correcto en el impuesto a la renta y, además, consideran las unidades en soles. Asimismo, han identificado que el impuesto a la renta depende del ingreso del trabajador. Según Duval (1999) realizan tratamientos en el registro de lengua verbal cuando asocian e identifican las magnitudes presentes en la situación: ingreso e impuesto a la renta.

A continuación, se muestra el trabajo de uno de los estudiantes, ver figura 1.

a) Determine el valor del impuesto a la renta (R) cuando el ingreso (I) de un trabajador independiente es:

$7 \text{ UIT} = 29050$

Ingreso (I)	Impuesto a la Renta (R)
I = S/. 28 450	No paga impuesto a la renta ya que su ingreso es menor a los 7 UIT
I = S/. 30 000	$30\ 000 - 29\ 050 = 950 \Rightarrow 8\% (950) = 76$ soles es lo que debe pagar
I = S/. 45 540	$45\ 540 - 29\ 050 = 16\ 490 \Rightarrow 8\% (16\ 490) = 1\ 319,20$ soles es lo que debe pagar

b) Determine la variable independiente y dependiente

Variable independiente	Ingresos
Variable dependiente	Impuesto (UIT)

Figura 1: Respuesta de la estudiante 2 para el ítem 1a) y b)

Por otro lado, se analizó el trabajo de los 2 de los 10 estudiantes que presentaron dificultades en el tratamiento del registro de representación verbal. Observamos, que estos estudiantes logran identificar la variable independiente y dependiente, pero muestran dificultades en determinar los valores para impuesto a la renta. Pensamos que esto se debe a la falta de comprensión del problema, particularmente de este enunciado, "Para ingresos mayores a 7 UIT, se pagará el 8% del exceso de los 7 UIT". En el trabajo de los estudiantes hemos observado que el obstáculo ha sido no entender la expresión "el exceso". Además, hemos notado que no consideran en sus respuestas las unidades de soles. Coincidimos con Duval (1999) en que las dificultades de los estudiantes se dan porque no logran discriminar en el enunciado la designación de los objetos pertinentes, y esto lo podemos ver en la figura 2.

a) Determine el valor del impuesto a la renta (R) cuando el ingreso (I) de un trabajador independiente es:

Ingreso (I)	Impuesto a la Renta (R)
I = S/. 28 450	$28\ 450 - 8\% \times 7 \text{ UIT} = 0$
I = S/. 30 000	$30\ 000 - 8\% (950) \Rightarrow 30\ 000 - 76 = 29\ 924 \text{ R}$
I = S/. 45 540	$45\ 540 - 8\% (16\ 490) \Rightarrow 45\ 540 - 1\ 319,20 = 44\ 220,8 \text{ R}$

b) Determine la variable independiente y dependiente

Variable independiente	Monto anual.
Variable dependiente	Impuesto a la renta (Unidad Impositiva Tributaria (UIT))

Figura 2: Respuesta de la estudiante 2 para el ítem 1 a) y b)

Análisis a priori de la tarea 1 ítem c)

Este ítem tiene como objetivo que los estudiantes realicen la conversión del registro de representación verbal al registro de representación algebraico. Se espera que los estudiantes relacionen la variable independiente con respecto a la variable dependiente mediante una expresión matemática que corresponda a las condiciones dadas en el problema. A continuación, se presenta el ítem 1c).

c) Halle una expresión matemática que muestre la relación entre los ingresos (I) de un trabajador independiente y el impuesto a la renta (R) que deberá cancelar al finalizar el año.

Análisis a posteriori de la tarea 1 ítem c)

En el análisis de este ítem hemos observado que 1 de los 10 estudiantes presenta una expresión matemática con todos los elementos al expresar una función, como se observa en la figura 3. Notemos que la regla de correspondencia y el dominio son adecuados, además, indica qué significan las variables x y $f(x)$ en su expresión matemática. Este es un ejemplo de un estudiante que consigue transitar del registro de representación verbal al registro de representación algebraico.

c) Halle una expresión matemática que muestre la relación entre los ingresos (I) de un trabajador independiente y el impuesto a la renta (R) que deberá cancelar al finalizar el año.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x \leq 29050 \\ (x - 29050) \times 0.08 & ; x > 29050 \end{cases}$$

$x =$ Ingreso del trabajador independiente
 $f(x) =$ Impuesto a la renta

Figura 3: Respuesta de la estudiante 4 para el ítem 1c)

Por otro lado, 5 de los 10 estudiantes presentan reglas de correspondencias correctas. Sin embargo, en uno de los intervalos del dominio le falta indicar que la variable $x \geq 0$, pues para la variable x se considera valores mayores o iguales a 0 por tratarse del ingreso de un trabajador. También, hemos observado que no describen el significado de las variables empleadas en su expresión. En el caso del trabajo del estudiante 1 podemos observar que realiza el tratamiento en el registro algebraico, dado que realiza cálculos para simplificar la regla de correspondencia como se observa en figura 4.

c) Halle una expresión matemática que muestre la relación entre los ingresos (I) de un trabajador independiente y el impuesto a la renta (R) que deberá cancelar al finalizar el año.

$$\left. \begin{cases} 0, x \leq 29050 \\ 0,8(x - 29050), x > 29050 \end{cases} \right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 29050 \\ 0,8x - 2324, x > 29050 \end{cases}$$

Figura 4: Respuesta de la estudiante 1 para el ítem 1c)

Asimismo, observamos que 2 de los 10 estudiantes no logran expresar completamente la regla de correspondencia y hay ausencia del dominio, a partir de esto, deducimos que no han logrado la comprensión total del problema (ver figura 5). Mientras que, 2 de los 10 escriben reglas de correspondencias que no muestran la relación que existe

entre el ingreso de un trabajador y el impuesto a la renta. Estos estudiantes son los mismos que no respondieron adecuadamente los ítems 1 a) y b). En estos casos no hubo un tránsito exitoso del registro de representación verbal al registro de representación algebraico.

c) Halle una expresión matemática que muestre la relación entre los ingresos (I) de un trabajador independiente y el impuesto a la renta (R) que deberá cancelar al finalizar el año.

$$X = (x - 29,050) \cdot 0,08$$

$$I.R = y = f(x) = 8\% (x - 29,050)$$

Handwritten notes: $2,324 = 0,08x$

Figura 5: Respuesta de la estudiante 3 para el ítem 1c)

Análisis a priori de la tarea 1 ítem d)

La finalidad del ítem 1d) es que los estudiantes realicen la conversión del registro de representación algebraica al registro de representación gráfico. Se espera que los estudiantes muestren la representación gráfica de la función por tramos obtenida en el ítem 1 c), considerando el contexto del problema. Además, se exige que realicen el tratamiento en el registro gráfico, al determinar los posibles valores para las variables ingreso e impuesto a la renta que se denominan dominio y rango de la gráfica, respectivamente.

Análisis a posteriori de la tarea 1 ítem d)

Respecto a esta tarea, observamos que 4 de los 10 estudiantes logran transitar del registro de representación algebraica al registro de representación gráfica. La gráfica que presentan dichos estudiantes se caracterizan por mostrar todos los elementos que componen la representación gráfica de una función, pues designaron en base a la situación que el eje x corresponde al ingreso del trabajador y el eje y corresponde al impuesto a la renta, además, representaron la gráfica teniendo en cuenta la regla de correspondencia y el dominio. Por otro lado, los estudiantes lograron indicar el dominio y rango de la función con esto evidenciaron el tratamiento en el registro de la representación gráfica. (ver figura 6).

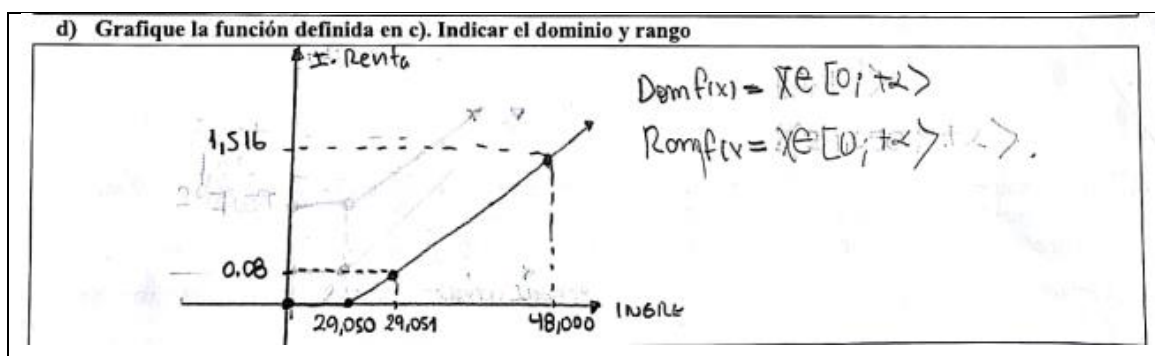


Figura 6: Respuesta de la estudiante 3 para el ítem 1d)

Por otra parte, 6 de los 10 estudiantes han presentado dificultades para representar gráficamente la función expresada en el ítem 1 c); en consecuencia, no lograron la conversión del registro de representación algebraico al registro de representación gráfico. En estos casos, se visualiza que en sus gráficas hay ausencia de algunos de los elementos mencionados anteriormente, que caracterizan una adecuada representación gráfica. Esto ha llevado que algunos de los estudiantes no consiguieron realizar el tratamiento en el registro gráfico de manera correcta, es decir, colocaron intervalos incorrectos para el dominio y rango. Desde la perspectiva de Duval (1999), le han faltado realizar la interpretación local de la gráfica; por ejemplo, no consiguen deducir el dominio y rango. A continuación, mostramos el trabajo de un estudiante de este grupo, ver figura 7.

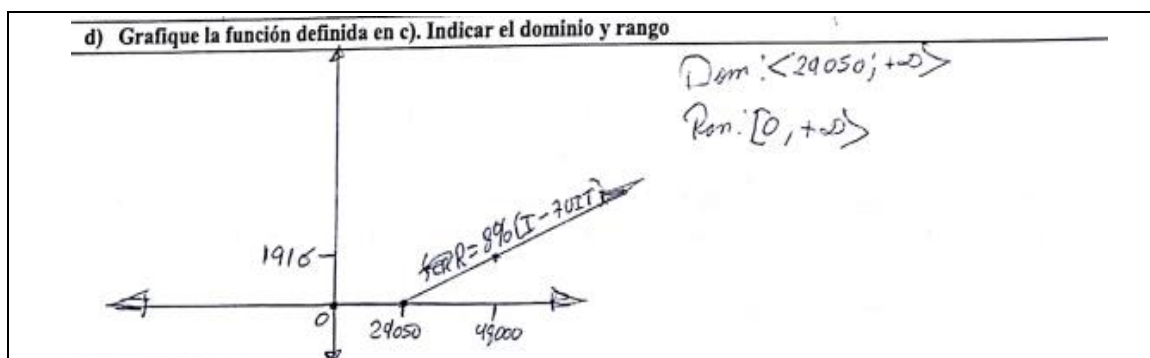


Figura 7: Respuesta de la estudiante 6 para el ítem 1d)

Análisis a priori de la tarea 2

Esta tarea 2 tiene como propósito que los estudiantes realicen la conversión del registro de representación gráfica al registro de representación algebraica. Se espera que los estudiantes, al observar la representación gráfica de la función por tramos, puedan asociar la regla de correspondencia de las tres partes que son: una recta decreciente definida en $-\infty; -1]$, una curva parabólica convexa definida en $[-1; 2 >$ y una recta horizontal definida en $[2; 7 >$ para expresar como una función por tramos en su representación algebraica.

Observa la gráfica y encuentre su regla de correspondencia, dominio y rango.	
	Regla de correspondencia:
	$f(x) =$
	Escriba tus procedimientos
	Dom(f)=_____ Ran(f)=_____

Análisis a posteriori de la tarea 2

En esta tarea, observamos que 4 de los 10 estudiantes realizaron adecuadamente la conversión del registro de representación gráfica al registro de representación algebraica. En este último, observamos que asocian correctamente las ecuaciones generales de cada regla de correspondencia que constituye la función por tramos. Asimismo, observamos que asocian correctamente los puntos del plano cartesiano por donde pasa la curva con las ecuaciones correspondientes, esto con el objeto de determinar la representación algebraica del objeto en estudio. La siguiente figura muestra el trabajo realizado por uno de los estudiantes.

1B) Por Análisis Visual: (Se determina)

Una función | una f(x) cuadrática | una f(x) constante
 \Rightarrow Se determina una Regla de Correspondencia por tramos.

Tramo I | Tramo II | Tramo III

Análisis Tramo I

Lineal: $f(x) = ax + b$
 Tomando dos ptos:
 $f(1) = a(1) + b = -1$
 $f(2) = a(2) + b = 0$

$$\begin{cases} -a + b = -1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{f(1)} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Hallando b:
 Si $a = 1$; $b = -1$
 $-1 - b = -1$
 $-b = 0$
 $b = 0$

Si $f(x) = ax + b$
 $f(x) = -x + (-1)$
 $f(x) = -x - 1$ (Tramo I)

Análisis Tramo II (Visualmente el $U(h, k) = (0, 1)$)
 $f(x) = a(x-h)^2 + k$
 este el resultado de $AX^2 + BX + C = 0$ pero para fines de análisis conviene simplificarlo completando Cuadrados.

Problema Valnet:
 $f(-1) = a(-1-h)^2 + k = 2 \rightarrow (i)$
 $f(0) = a(0-h)^2 + k = 1 \rightarrow (ii)$

Análisis (i) $f(x) = a(x-h)^2 + k$
 Si $f(-1) = a(-1-h)^2 + k = 2$
 $= a(-1(1+h))^2 + k = 2$
 $= -a(1+h)^2 + k = 2$
 $= -a(1+2h+h^2) + k = 2$
 $= -a - 2ah - ah^2 + k = 2 \rightarrow (i)$

Análisis (ii) $f(x) = a(x-h)^2 + k$
 Si $f(0) = a(0-h)^2 + k = 1$
 $f(0) = ah^2 + k = 1 \rightarrow (ii)$

Análisis Valnet (iii) $f(x) = a(x-h)^2 + k$
 $f(x) = x^2 + 1$
 Por análisis gráfica

Planteando al Análisis:
 Usando pto de la gráfica f
 Partiendo de la Definición estándar de la Cuadrática:
 $f(x) = x^2 + 1$

Tramo III Una f(x) Constante
 Si $f(x) = 6$; $2 \leq x < 7$
 \therefore La Regla de Correspondencia Sería:
 $f(x) = \begin{cases} -(x+2); & -\infty < x \leq -1 \\ x^2 + 1; & -1 < x < 2 \\ 6; & 2 \leq x < 7 \end{cases}$

Figura 8: Respuesta del estudiante 10 para la tarea 2

En la figura 8, podemos observar que el estudiante logra identificar correctamente que nuestro objeto de estudio, función por tramos, está constituida por la regla de correspondencia de una expresión lineal definida en $< -\infty; -1]$, una expresión cuadrática definida en $< -1; 2 >$ y una constante definida en $[2; 7 >$. Para determinar dichas reglas de correspondencia, realizaron el tratamiento en el registro de representación algebraico relacionando adecuadamente las representaciones gráfica y algebraica.

No obstante, 3 de 10 estudiantes también logran realizar correctamente la conversión del registro de representación gráfico al registro de representación algebraica, pero con algunas dificultades para determinar el dominio de cada regla de correspondencia (ver la figura 9). Esto significa que los estudiantes logran asociar parcialmente la representación gráfica con la representación algebraica. No olvidemos que para definir una función se debe conocer correctamente la regla de correspondencia y su dominio.

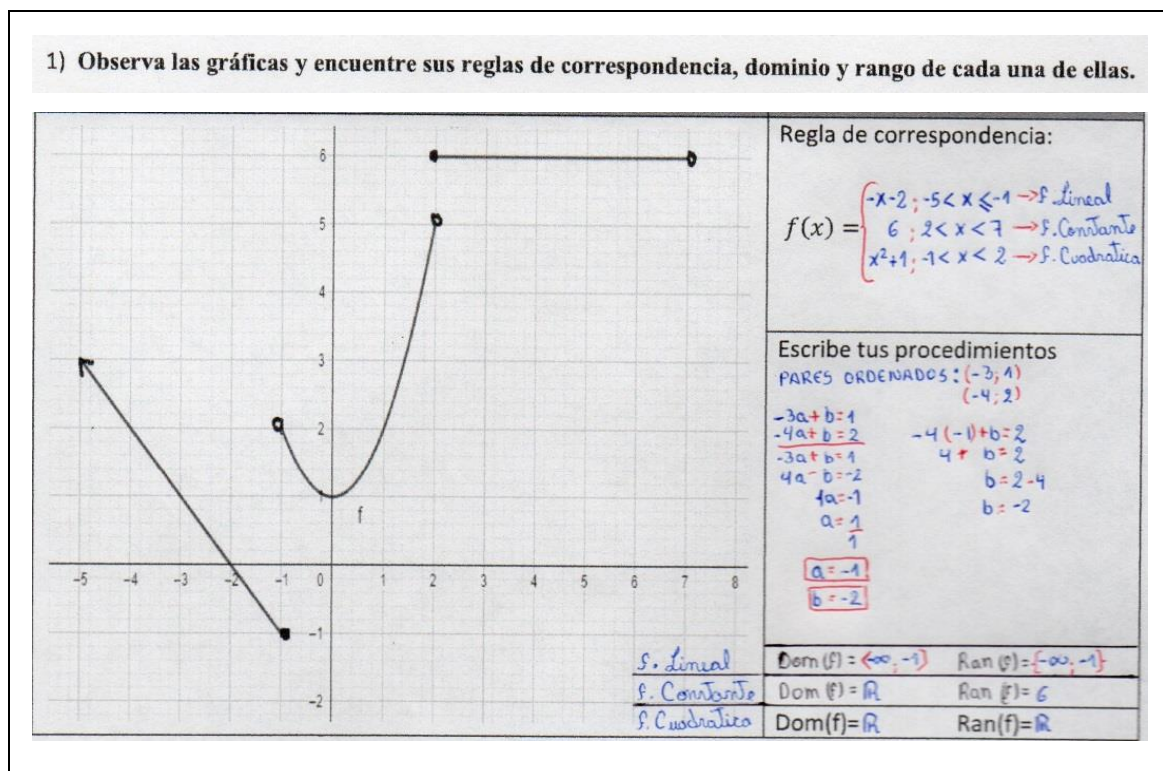


Figura 9: Respuesta de la estudiante 4 para la tarea 2

Finalmente, 3 estudiantes no logran realizar la conversión del registro de representación gráfico al algebraico, pues la regla de correspondencia (representación algebraica) que logran mostrar no guarda coherencia con las curvas mostradas en la representación gráfica (ver la figura 10). Esto significa que los estudiantes no logran interiorizar una función en su registro gráfico y algebraico.

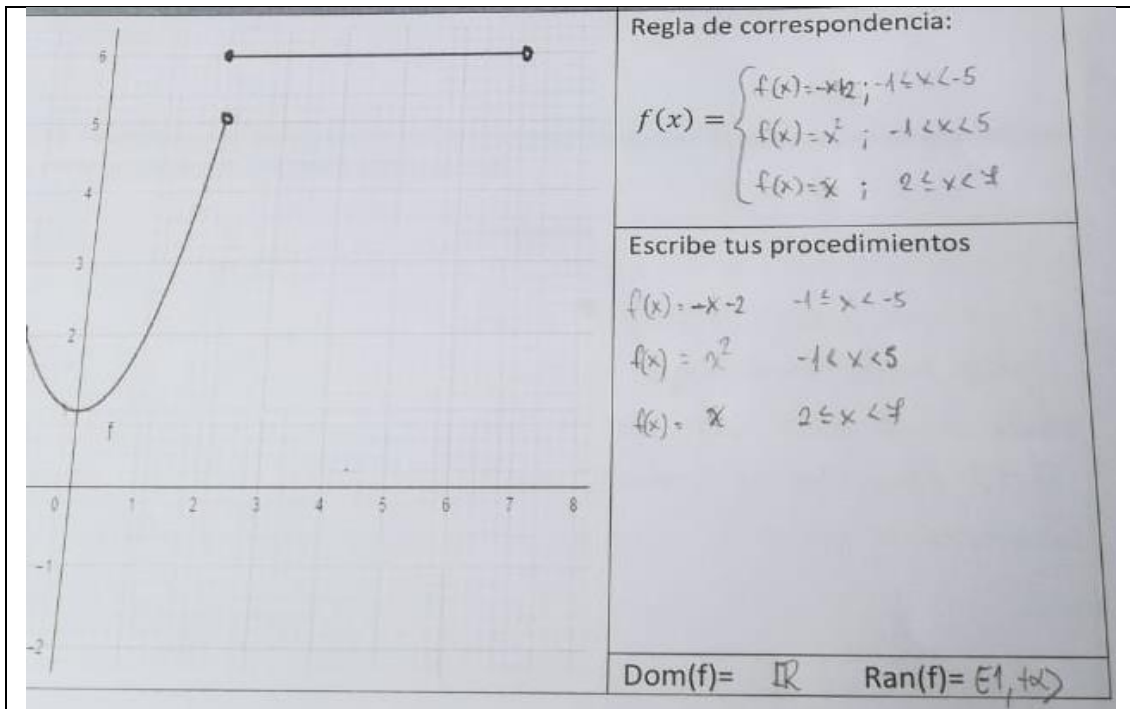
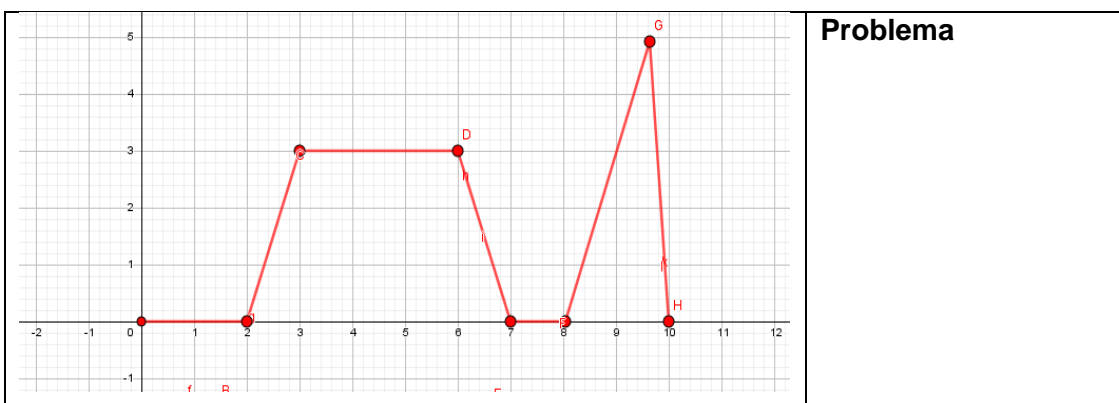


Figura 10: Respuesta del estudiante 7 para la tarea 2

Análisis a priori de la tarea 3

Esta tarea tiene como propósito que los estudiantes realicen la conversión del registro de representación gráfico (registro de partida) al registro de representación verbal (registro de llegada). Con esta tarea se espera que los estudiantes evidencien en su situación inventada lo siguiente: relacionar las variables independientes y dependientes, describir el comportamiento de la gráfica, corresponder a cada valor del registro de partida un único valor en el registro de llegada y asociar las unidades (por ejemplo: tiempo) del registro de partida con las unidades del registro de llegada (por ejemplo: distancia).

3) A partir de la gráfica, inventa una situación sobre funciones teniendo en cuenta las variables (independiente y dependiente) y otras condiciones que creas convenientes.



Análisis a posteriori de la tarea 3

En el análisis de esta tarea observamos que 8 de los 10 estudiantes no presentan situaciones con las características esperadas en el análisis a priori. De este grupo, 2 de ellos presentaron situaciones que solo asocian los valores enteros de las variables independiente y dependiente, es decir, consideran en su situación los puntos (3;3), (4;3), (6;3), (7;3), etc. siendo esto una descripción incompleta del comportamiento de la gráfica, ver figura 11.

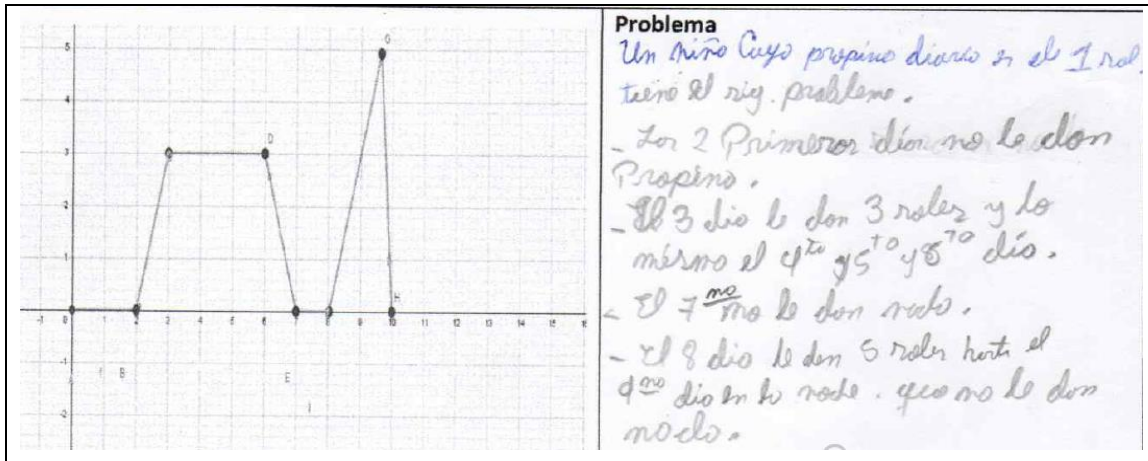


Figura 11: Respuesta del estudiante 8 para la tarea 3

Por otro lado, 4 de los 8 estudiantes solo describen parte del comportamiento de la gráfica o la descripción en algunos tramos son incorrectos como se muestra en la figura 12. El trabajo presentado en la figura 12 es una muestra de un estudiante que logra asociar la variable independiente (tiempo: minutos) con la variable dependiente (velocidad m/min) y describir el comportamiento de la gráfica empleando expresiones como “descansa, mantiene, aumenta y llega”. Sin embargo, se observa que no describe algunos tramos, por ejemplo, en el intervalo [6,8] y, también, que describe de manera incorrecta en el intervalo de [2,3].

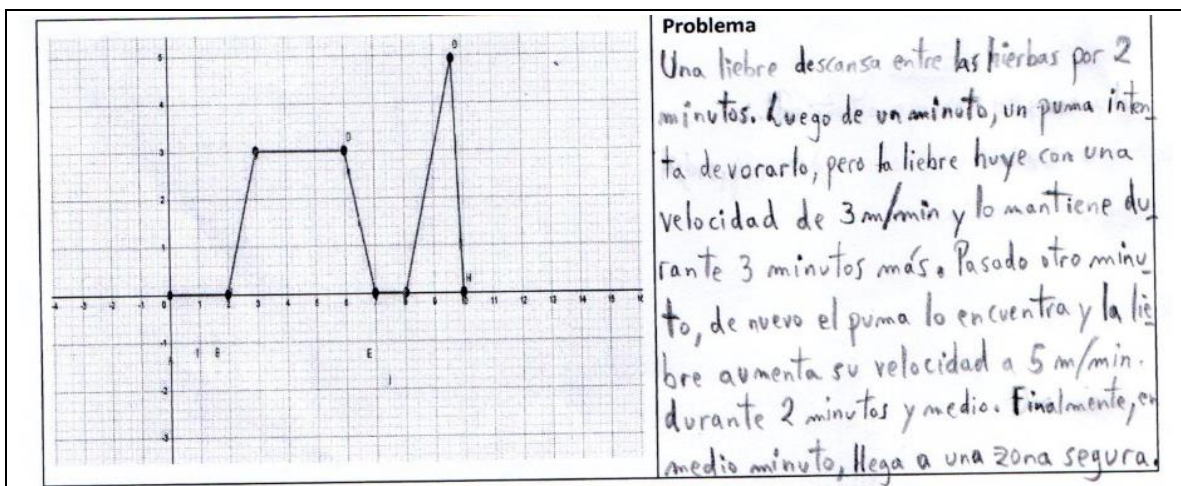


Figura 12: Respuesta de la estudiante 1 para la tarea 3

También, en el análisis, hemos notado que 2 de los 8 estudiantes presentan situaciones que, a su vez, consideran expresiones algorítmicas (ver figura 13). Pensamos que la consigna de la tarea no fue comprendida por los estudiantes o que consideran que una situación por ser de matemática debe tener como elementos a los algoritmos.

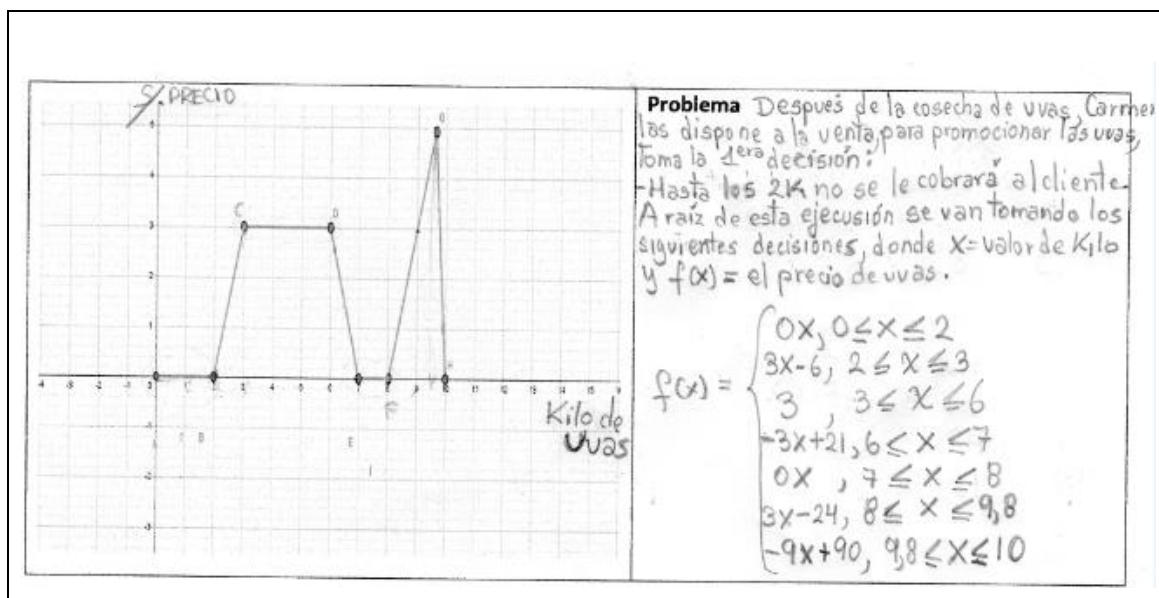


Figura 13: Respuesta de la estudiante 9 para la tarea 3

De este análisis queda evidente que los estudiantes no tuvieron éxito en la conversión del registro de representación gráfica al registro de representación verbal, pues no consiguieron dar una mirada global a la gráfica y significado a la relación entre las dos variables.

Por otra parte, 2 de los 8 estudiantes no presentaron respuestas para esta tarea, creemos que no tuvieron la intención de tratar de inventar una situación.

DISCUSIÓN

Respecto a lo encontrado y el trabajo que realizó Yam (2009) coincidimos que los estudiantes presentan dificultades en la representación gráfica. En el análisis de la tarea 1 d) se evidenció que los estudiantes no logran alcanzar la representación gráfica de manera adecuada, muestran dificultades en transitar de un registro de representación algebraico al gráfico. Asimismo, en la tarea 3 observamos que los estudiantes presentan una interpretación parcial de la representación gráfica.

En el caso de la investigación de Chumpitaz (2013) concluye que los estudiantes tienen dificultades en identificar el dominio, el rango y realizar transformaciones de

funciones por tramos. Estas dificultades lo hemos notado en el tratamiento del registro de representación gráfica mostradas en el análisis de las tareas 2 y 3.

En nuestro trabajo y en la investigación de Saa y Trochez (2013) se concuerda que las tareas diseñadas y aplicadas, en base a la teoría de Registros de Representación Semiótica facilitan el análisis de los logros y dificultades en el aprendizaje de la función por tramos. Las 3 tareas diseñadas y aplicadas en nuestra investigación se evidenció los logros y dificultades que tienen los estudiantes en las actividades cognitivas: conversión y tratamiento.

Por otro lado, en base a los resultados y análisis de las tareas obtenidos exponemos los siguientes comentarios.

Tabla 3. Comentarios de los resultados de las tareas

Comentarios de los resultados de las tareas diseñadas y aplicadas	
Tarea 1 a) y b)	A partir del análisis, creemos que la tarea 1 a) y b) son importantes pues permiten que el estudiante pueda comprender el problema contextualizado teniendo en cuenta las variables independientes y dependientes; además, observar en los casos particulares qué ocurre con los impuestos a la renta y así facilitar la generalización (registro algebraico).
Tarea 1 c)	A partir de las respuestas de los estudiantes consideramos importante para la conversión del registro de representación verbal al algebraico que desarrollen el tratamiento del registro verbal, para así asegurarse la comprensión del problema. Asimismo, nos queda de experiencia dos puntos: 1) enfatizar en los estudiantes los elementos que debe considerarse al presentar la función como una expresión matemática y 2) tomar la sugerencia de Tocto (2015) el de utilizar el registro tabular para poder transitar del registro de representación verbal al registro de representación algebraico.
Tarea 1 d)	A partir del análisis, notamos que los estudiantes al realizar la conversión del registro de representación algebraica al registro de representación gráfico, han movilizado estos conocimientos: plano cartesiano, variable independiente (ingreso), variable dependiente (impuesto a la renta), puntos que relacionan las variables, gráfico de la función por tramos, dominio y rango. Según Duval (1999), pensamos que esta conversión depende de los tratamientos algorítmicos que realice el estudiante en el registro algebraico.
Tarea 2	A partir del trabajo presentado por los estudiantes, consideramos importante que logren asociar la representación gráfica de cada curva con sus respectivas reglas de correspondencia. Para conseguir este último, consideramos de vital importancia las sugerencias dadas por Tocto (2015), utilizar el registro tabular para transitar del registro de representación gráfico al registro de representación algebraica.
Tarea 3	En la tarea 3 se intentó generar la conversión de un registro de partida: <i>registro gráfico</i> a un registro de llegada: <i>registro verbal</i> ; sabiendo como

	<p>lo explica Duval (2004) que esta actividad descriptiva busca la espontaneidad del sujeto. Esta actividad descriptiva requiere de una interpretación global de la gráfica y comprender el significado de la relación que existe entre las dos variables, así como, reconocer que los cambios en una variable independiente generan cambios en la otra variable, en este caso, la dependiente. Este reconocimiento no se evidencia en algunos trabajos de nuestros estudiantes. Consideramos que esta tarea para nuestros estudiantes resultó ser la más difícil que las otras, pues el hecho de inventar problemas es algo muy poco trabajado.</p>
--	--

Con nuestro estudio dejamos abierta la posibilidad que para futuros trabajos puedan considerar lo siguiente:

- Analizar las dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas de función por tramos a través de la coordinación de los registros de representación semiótica.
- Identificar las comprensiones y dificultades sobre límites y continuidad cuando estas son aprendidas mediante la noción de función por tramos y los registros de representación semiótica.

CONCLUSIONES

En cuanto al primer objetivo específico de esta investigación: *“Diseñar tareas que permitan movilizar los elementos y propiedades de la función por tramos en sus diferentes registros de representación semiótica: lengua natural, algebraico y gráfico”*, concluimos que:

- En la conversión del registro de representación verbal al registro de representación algebraico, creemos importante considerar que los estudiantes han de conseguir dicha conversión si realizan el tratamiento en el registro verbal, pues según nuestra experiencia esto ayudó a que asocien e identifiquen las variables que intervienen en el problema, y también que hallen los valores de la variable dependiente en función de la variable independiente.
- Pensamos que podíamos haber conseguido que más de nuestros estudiantes logren la conversión del registro de representación verbal al registro de representación algebraico, si antes han trabajado con tareas que demanden transitar del registro verbal al registro de representación tabular.
- En la conversión del registro de representación algebraico al registro de representación gráfico, los estudiantes realizaron el siguiente tratamiento en el registro gráfico: representaron la función por tramos, ubicaron la variable

independiente en el eje x y la variable dependiente en el eje y hallaron el dominio y rango.

- En la conversión del registro de representación gráfico al registro de representación algebraico, los estudiantes lograron la articulación entre los registros, pues mostraron adecuadamente las reglas de correspondencia con sus respectivos dominios de cada curva a partir de la representación gráfica.
- En el caso de la tarea que demanda la conversión del registro de representación gráfico al registro de representación verbal, los estudiantes lograron el tratamiento de: relacionar las variables independientes y dependientes, indicar las unidades y describir el comportamiento de la gráfica.
- Pensamos que antes de presentar la tarea 3 que lleva a la conversión del registro de representación gráfico al registro de representación verbal es necesario preparar a los estudiantes con tareas previas que permitan dicha conversión.

Respecto al segundo objetivo específico de este trabajo:

“Analizar en las producciones de los estudiantes las actividades cognitivas de tratamiento y conversión cuando transitan en los registros de lengua verbal, algebraico y gráfico” concluimos que:

- La conversión del registro de representación verbal al algebraico se llevó a cabo a partir de trabajar casos particulares en la variable independiente para encontrar el valor de la variable dependiente e identificar dichas variables. Pensamos que los estudiantes que presentaron la regla de correspondencia de manera incompleta o incorrecta es porque les faltó trabajar con más casos particulares. En ese sentido, creemos necesario que los estudiantes transiten por el registro tabular para asegurarnos que alcancen el registro algebraico. Asimismo, consideramos que una noción que se debe incidir en el trabajo de los estudiantes es que una función está definida siempre que se conozca su regla de correspondencia y dominio.
- Respecto a la conversión del registro de representación algebraico al gráfico. Observamos que los estudiantes que presentaron dificultades en el registro algebraico son aquellos que tuvieron, también, dificultades en el registro gráfico. Asimismo, en el tratamiento del registro gráfico se observó que el error recurrente es hallar el rango.
- En el caso de la conversión del registro de representación gráfico al verbal notamos que los estudiantes no tienen éxito en esta conversión. Observamos que a los estudiantes les resulta difícil tener una interpretación global, en particular, en describir el comportamiento de la gráfica función por tramos.

Asimismo, creemos que estas dificultades se debieron a que los estudiantes han tenido poca o nada de experiencia en inventar o crear problemas. Por esa razón, consideramos que en el quehacer matemático debemos incluir tareas que exijan el invento de situaciones o creación de problemas matemáticos.

En cuanto al objetivo general de esta investigación:

“Analizar cómo el tránsito de distintos registros de representación semiótica permite la comprensión de la noción de función por tramos en estudiantes del I ciclo de Contabilidad” concluimos que:

- En general, tuvimos estudiantes que lograron transitar por al menos dos registros de representación semiótica: registro verbal, registro algebraico y registro gráfico. Esto como lo señala Duval es un indicador de la comprensión de la noción de función por tramos, pues diferenciaron el objeto matemático de sus representaciones. En ese sentido, los estudiantes han movilizado conocimientos referidos a los elementos y propiedades de la función por tramos.
- En cuanto al análisis de los tratamientos y conversiones en los registros de representación semiótica, observamos, que el tratamiento en el registro verbal es esencial para que los estudiantes logren la comprensión del problema y relación de las variables que intervienen en la situación. Respecto, a las conversiones, hemos notado que los estudiantes tienen mayor dificultad en transitar del registro de representación gráfica al registro verbal, y deducimos que esto se debe a que no es frecuentemente abordado.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional de Cañete por estimularnos a la investigación y recordarnos que la actividad esencial de la universidad es la investigación.

Un agradecimiento especial a los 10 estudiantes del I ciclo de Contabilidad de la Universidad Nacional de Cañete que participaron en este trabajo, por su colaboración y entusiasmo mostrado en las sesiones.

BIBLIOGRAFÍA

Chumpitaz, L. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú

Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Cali – Colombia: Editorial Merlín I.D

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. Revista la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. 9(1), pp. 143-168.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México, D.F. McGraw. Hill Interamericana.

Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal*. (Tesis de Maestría). Universidad autónoma de Manizales. Colombia.

Oviedo, L. y Kanashiro, A. (2012). *Los registros semióticos de representación en matemática*. Revista Aula Universitaria. 13, pp. 29-36.

Saa y Trochez (2013). *Una propuesta de enseñanza de la función por tramos usando el periódico y geogebra*. (Tesis de Licenciatura). Universidad del Valle. Colombia.

Tocto, E. (2015). *Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú)

Yam Huh, E. (2009). *Función definida por partes. Un análisis histórico – didáctico referente a su tratamiento escolar*. (Tesis de licenciatura). Universidad Autónoma de Yucatán, México.